**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

* η f είναι συνεχής στο Δ και
* f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

**Μονάδες 8**

**Α2.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο (ολικό) μέγιστο, το f(x0);

**Μονάδες 3**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστη, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Για κάθε  ισχύει 

(μονάδες 2)

**β)** Αν  ή , τότε 

(μονάδες 2)

**γ)** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

**δ)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ  Δ, τότε ισχύει



(μονάδες 2)

**ε)** Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η εξίσωση

, zC

**Β1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

**Μονάδες 9**

**Β2.** Αν z1=1+i και z2=1-i είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός



είναι ίσος με -3i

**Μονάδες 8**

**Β3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει



όπου w, z1, z2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση h(x)=x-ln(ex+1), xR

**Γ1.** Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

, xR

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτής της στο .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση φ(x)=ex(h(x)+ln2), xR

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), στον άξονα x΄x και την ευθεία x=1

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση 

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x0=0 και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση



έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι x=0

(μονάδες 7)

**β)** Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή t=0 από ένα σημείο Α(x0,f(x0)) με x0<0 και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x), xx0 με x=x(t), y=y(t), t0. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι x΄(t)>0 για κάθε t0.

(μονάδες 4)

**Μονάδες 11**

**Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

g(x)=(xf(x)+1-e)2 (x-2)2, x(0, +)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

**Μονάδες 7**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 251

**Α2.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 273

**Α3.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 150

**Α4.**

**α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Έστω  με 

Έχουμε:





 και  και 

Άρα  και 

**Β2.** 

**Β3.**   

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η h είναι συνεχής στο R ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων





Άρα η h είναι κοίλη στο 

**Γ2.** Αφού h΄(x) > 0 ,  τότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο.

Για κάθε  έχουμε: 



**Γ3.**  όπου  και 

Άρα η  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεία y =0

 , όπου και 

Άρα η  έχει πλάγια ασύμπτωτη στο την ευθεία y = x

**Γ4.** Για κάθε  έχουμε





Η φ είναι συνεχής στο [0,1]

Για κάθε  έχουμε 

και , οπότε  και άρα  για κάθε 

Επομένως



=







**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έχουμε , οπότε η f είναι συνεχής στο σημείο 

Για κάθε  έχουμε 

Θεωρούμε την συνάρτηση 

Η h είναι συνεχής στο 

Για κάθε έχουμε 

Για x < 0 είναι , οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο 

και άρα για x < 0 είναι .

Για x > 0 είναι , οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο  και άρα για x > 0 είναι .

Επομένως για κάθε  και αφού η f συνεχής στο 0, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο 

**Δ2. α)** Για κάθε έχουμε 

Επομένως 

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο  με 

Θεωρούμε την συνάρτηση 

Έχουμε G(0) =  , οπότε η x = 0 είναι λύση της εξίσωσης G(x) = 0

Επειδή η f είναι κυρτή στο  τότε η  είναι γνησίως αύξουσα στο 

* Για x > 0 είναι , οπότε 
* Για x < 0 είναι , οπότε 
* Για x = 0 είναι f(0) = 1 > 0

Επομένως f(x) > 0 για κάθε 

* Για x > 0 είναι 

Άρα 

* Για x < 0 είναι 

Άρα 

Επομένως η x =0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης G(x) = 0

**β)** Είναι , οπότε , 

Αν  η χρονική στιγμή κατά την οποία είναι  τότε έχουμε 

, οπότε



Άρα το  είναι το ζητούμενο σημείο της καμπύλης

**Δ3.** Έχουμε 

,

Είναι ή x = 2 ή 

Θεωρούμε την συνάρτηση 

Επειδή για κάθε , η Κ είναι γνησίως αύξουσα στο οπότε η εξίσωση Κ(x) = 0 έχει το πολύ μια ρίζα στο 

Η Κ συνεχής στο [1,2] και ισχύει 

Άρα σύμφωνα με το ΘΒ υπάρχειώστε Κ(ρ)=0, το οποίο μαναδικό.

Για 0 < x < ρ είναι Κ(x) < K(ρ) = 0 και

για x > ρ είναι Κ(x) > K(ρ) = 0

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 1 ρ 2 + | | | |
| x – 2 | – | – | – | + |
|  | – | + | + | + |
| K(x) | – | – | + | + |
| g΄(x) | – | + | – | + |
| g(x) | Γν.φθίνουσα | Γν. αύξουσα | Γν.φθίνουσα | Γν. αύξουσα |

τ.ελάχιστο τ. μέγιστο τ. ελάχιστο

Άρα η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ **ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ**

**«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΣΙΦΝΑΙΟΣ Δ. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.